



---

**SINCRONIZACIÓN EN SISTEMAS QUÍMICOS**  
**SYNCHRONIZATION IN CHEMICAL SYSTEMS**

J.A. Arzola-Flores<sup>1,2\*</sup>, E. Vidal-Robles<sup>3</sup>, J.F. Rojas-Rodríguez<sup>4</sup>, A.A. Hernández-Santiago<sup>5</sup>, A.M. Cervantes-Tavera<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Laboratorio de Energía. Instituto de Física. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Av. San Claudio S/N. Col. San Manuel. Puebla, Pue. C.P 72590. México.

<sup>2</sup>Centro de Sistemas Complejos. Instituto Politécnico Nacional. Juan de Dios Bátiz S/N. Col La Escalera. C. de México. C.P. 07738. México.

<sup>3</sup>Facultad de Ingeniería Química. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Av. San Claudio S/N. Col. San Manuel. Puebla, Pue. C.P 72590. México.

<sup>4</sup>Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Av. San Claudio S/N. Col. San Manuel. Puebla, Pue. C.P 72590. México.

<sup>5</sup>Laboratorio de Química-Biofísica. Facultad de Ciencias Químicas. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Av. San Claudio S/N. Col. San Manuel. Puebla, Pue. C.P 72590. México.

Recibido 14 de Marzo de 2017; Aceptado 11 de Mayo de 2017

---

## Resumen

En el presente trabajo se muestra la sincronización unidireccional simétrica lineal de dos sistemas químicos de distinta naturaleza, cuya dinámica individual es descrita por un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales. La evolución de la dinámica de sincronización muestra soluciones periódicas conforme aumenta el parámetro de acoplamiento, y para cierto valor particular del parámetro emerge un estado de caos intermitente que es corroborado mediante la Transformada Rápida de Fourier, la función de autocorrelación, el exponente máximo de Lyapunov, la dimensión fractal y el diagrama de recurrencia de las series temporales obtenidas de la solución numérica del sistema acoplado. Esta metodología podría ayudar a entender la compleja dinámica de los ritmos circadianos en mamíferos.

*Palabras clave:* espacio fase, variedad de sincronización, caos intermitente, Oregonator, Brusselator.

---

## Abstract

This work shows the linear symmetric one-way synchronization of two chemical systems of different nature, whose individual dynamics is described by a system of nonlinear differential equations. Shows the evolution of the dynamics of synchronization solutions periodical as it increases the coupling, and certain value for parameter particular emerges a state of intermittent chaos that is corroborated by Fast Transformed of Fourier, autocorrelation function, the maximum Lyapunov exponent, fractal dimension and diagram of recurrence of the time series obtained from numerical coupled system solution. Is methodology could help to understand the complex dynamics of those rhythms circadian in mammals.

*Keywords:* space phase, variety of synchronization, intermittent chaos, Oregonator, Brusselator.

---

## 1 Introducción

### 1.1 Sincronización

La sincronización es un fenómeno común, por consiguiente ha sido muy estudiado en distintas áreas de la ciencia, por ejemplo en física (Arroyo y col. (2009), Vidal (2010), Pimentel (2008)), biología (Seung y col. (1995), Mendoza y col. (2009), Glass (2001), Castellanos y col. (2007), Goldbeter (1995))

y por supuesto en la química (Oporto y col (2014)). La sincronización es un proceso natural en muchos sistemas no lineales los cuales exhiben la habilidad de coordinar sus ritmos. El acoplamiento en sistemas que exhiben sincronización generalmente presentan dos tipos de acoplamiento: difusivo y conductivo (Vidal (2010)). Normalmente en los acoplamientos difusivos los sistemas se conectan a través de un término de difusión que regula con su valor un cierto estado de sincronización (Vidal (2010)). El segundo tipo de acoplamiento se lleva a cabo mediante la

\*Autor para la correspondencia. E-mail: [jesus\\_andres@comunidad.unam.mx](mailto:jesus_andres@comunidad.unam.mx)

conducción de uno de los sistemas por alguna de las variables del sistema que actúa como conductor (Vidal (2010)). Además la sincronización puede ser unidireccional o bidireccional; en la primera el sistema se subdivide en dos subsistemas, uno de ellos envuelve y conduce al otro, siendo la respuesta del sistema esclavizado seguir la dinámica del sistema conductor mientras que en la segunda de igual forma el sistema se subdivide en dos subsistemas, sin embargo, ambos subsistemas son conectados de tal forma que sus trayectorias están mutuamente influenciadas por el comportamiento del otro, este tipo de situación es muy común en láseres con retroalimentación (Arroyo y col. (2009), Vidal (2010)). Existe una subclasificación de tipos de sincronización, tales como la sincronización completa que fue el primer tipo descubierto, dicha sincronización consiste en una perfecta unión de las trayectorias de dos sistemas, donde se demuestra que dos sistemas son acoplados unidireccionalmente sólo si todos los exponentes de Lyapunov del subsistema a sincronizar son negativos y la dimensión fractal disminuye conforme aumenta el parámetro de acoplamiento (Pecora y col. (1990), Boccaletti y col. (2000)). Otros tipos de sincronización y no menos importantes son: sincronización generalizada (Kocarev y col. (1996)), sincronización de fase (Rosenblum y col. (1996)), sincronización por retardo (Taherion y col. (1999)), sincronización intermitente (Heagy y col. (1995)), sincronización de fase imperfecta (Rosenblum y col. (1997)) y finalmente la casi sincronización (Vidal (2010)). Por otro lado, la sincronización juega un rol importante en los procesos químicos involucrados en la biología celular, puesto que todos los mecanismos extracelulares se encuentran regulados por reacciones químicas a nivel intracelular, siendo estas últimas fundamentales en los mecanismos de regulación hormonal (Mendoza (2009)), un ejemplo importante es la sincronización en la dinámica de las neuronas de los núcleos supraquiasmáticos puesto que son los encargados de generar y coordinar procesos fisiológicos rítmicos como el ciclo de sueño vigilia, la secreción de hormonas, el ciclo celular, entre otros (Mendoza (2009)). Se han estudiado reacciones químicas a nivel experimental análogas a procesos fisiológicos, tal es el caso de la reacción de Belousov-Zhabotinsky (BZ), la cual ha sido empleada para estudiar el Ciclo de Krebs y la Glucólisis (Arzola y col. (2013)). La sincronización entre osciladores químicos de distinta naturaleza ha sido poco estudiada, sin embargo dicho fenómeno emergente es de vital importancia en la química de los seres vivos. La

finalidad de este trabajo es entender la dinámica de sincronización entre dos osciladores de distinta naturaleza química, con el fin de encontrar cierta analogía con reacciones químicas propias de los seres vivos y su sincronización.

## 1.2 Modelo matemático del Oregonator

El modelo del Oregonator fue propuesto originalmente por Richard Field y Richard M. Noyes (Field y col. (1987)) de la Universidad Oregon, para explicar el mecanismo de retroalimentación química de la reacción BZ planteado por Zhabotinsky (1991), el cual muestra el proceso de oxidación-reducción del indicador ferroína característico de la reacción BZ.

### 1.2.1 Mecanismo de reacción BZ

1.  $H^+ + HBrO_3 + HBrO_2 \leftrightarrow HBrO_2^+ + BrO_2^- + H_2O$
2.  $BrO_2^- + H^+ \rightarrow HBrO_2^+$
3.  $Fe(phen)_3^{2+} + HBrO_2^+ \leftrightarrow Fe(phen)_3^{3+} + HBrO_2$
4.  $H^+ + 2HBrO_2 \rightarrow HOBr + HBrO_3 + H^+$
5.  $H^+ + Br^- + HBrO_2 \leftrightarrow 2HOBr$
6.  $H^+ + Br^- + HOBr \leftrightarrow Br_2 + H_2O$
7.  $H^+ + Br^- + HBrO_3 \leftrightarrow HBrO_2 + HOBr$
8.  $2Fe(phen)_3^{3+} + CHBr(COOH)_2 \leftrightarrow 2Fe(phen)_3^{2+} + CBr(COOH)_2 + H^+$
9.  $H_2O + CBr(COOH)_2 \rightarrow H^+ + Br^- + COH(COOH)_2$
10.  $HOBr + CHBr(COOH)_2 \rightarrow CBr_2(COOH)_2 + H_2O$
11.  $Br_2 + CHBr(COOH)_2 \rightarrow CBr_2(COOH)_2 + H^+ + Br^-$
12.  $H_2O + CHBr(COOH)_2 \rightarrow CHOH(COOH)_2 + H^+ + Br^-$

### 1.2.2 Modelo del oregonator modificado

Mediante la cinética química del mecanismo de reacción BZ, Field y Noyes con un apropiado cambio de variable, plantearon el modelo matemático adimensional representado por las ecs. (1)-(2).

$$\beta \frac{dx_1}{dt} = x_1(1 - x_1) + f \frac{q - x_1}{q + x_1} z \quad (1)$$

$$\frac{dz}{dt} = x_1 - z \quad (2)$$

Siguiendo el mismo procedimiento empleado por Field y Noyes es posible modificar el modelo del Oregonator para explicar con más detalle el mecanismo de reacción BZ, dicho modelo es mostrado en las ecs. (3)-(4).

$$\beta \frac{dx_1}{dt} = x_1(1 - x_1) + (fz + \alpha) \frac{q - x_1}{q + x_1} \quad (3)$$

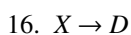
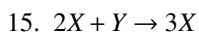
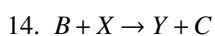
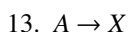
$$\frac{dz}{dt} = x_1 - z \quad (4)$$

Donde  $x_1$  y  $z$  corresponden a concentraciones adimensionales relacionadas con la concentración de  $\text{HBrO}_2$  ( $\text{mol} \cdot \text{dm}^{-3}$ ) y  $\text{Fe}(\text{phe})_3^{3+}$  ( $\text{mol} \cdot \text{dm}^{-3}$ ), respectivamente,  $\beta = KcB/K_5A$ ,  $q = 2K_3K_4/K_2K_5$ ,  $f$  es un factor estequiométrico adimensional y  $t$  es el tiempo adimensional.  $K_c, K_1, \dots, K_{12}$  son las constantes de velocidad de reacción,  $A$  es la concentración inicial de  $\text{BrO}_3^-$  y  $B$  la concentración inicial de  $\text{CH}_3(\text{COOH})_3$ , ambas en unidades de  $\text{mol} \cdot \text{dm}^{-3}$ . Todos los parámetros y variables del modelo mostrado en las ecs. (1)-(4) son adimensionales.

### 1.3 Modelo matemático del Brusselator

El modelo del Brusselator, fue creado por Ilya Prigogine y colaboradores en la Universidad de Bruselas (Nicolis y col., 2003). El mecanismo de reacción del Brusselator describe un sistema químico hipotético que convierte una especie química  $A$  en otra especie química  $D$  en cuatro pasos, mediante la participación de cuatro especies intermedias,  $X$ ,  $Y$ ,  $B$  y  $C$ . Las reacciones 14 y 15 son bimolecular y trimolecular autocatalítica, respectivamente.

#### 1.3.1 Mecanismo de reacción del Brusselator



Siguiendo el procedimiento empleado para construir el modelo matemático del Oregonator Modificado y empleando un apropiado cambio de variable, se obtiene el modelo matemático adimensional del mecanismo químico del Brusselator,

$$\frac{dx_2}{dt} = 1 - (b + 1)x_2 + ax_2^2y_1 \quad (5)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = bx_2 - ax_2^2y_1 \quad (6)$$

$x_2$  e  $y_1$  son concentraciones adimensionales relacionadas con las concentraciones de las especies químicas  $X$  ( $\text{mol} \cdot \text{dm}^{-3}$ ) e  $Y$  ( $\text{mol} \cdot \text{dm}^{-3}$ ), respectivamente,  $a = \frac{AK_{13}}{K_{16}} \sqrt{\frac{K_{14}}{K_{16}}}$  y  $b = BK_{15}/K_{16}$ , donde  $A$  y  $B$  son las concentraciones iniciales en  $\text{mol} \cdot \text{dm}^{-3}$  de dichas especies químicas y  $K_{13}, K_{14}, K_{15}$  y  $K_{16}$  son las constantes de velocidad de reacción del mecanismo químico del Brusselator. De igual forma que en el modelo del Oregonator, todos los parámetros y variables del modelo descrito en las ecs. (5)-(6) son adimensionales.

## 2 Metodología

El modelo del Oregonator Modificado y del Brusselator fueron acoplados mediante un término simétrico unidireccional lineal para ejemplificar la interacción entre ambos sistemas químicos. El sistema acoplado se muestra en las ecs. (7)-(10).

$$\beta \frac{dx_1}{dt} = x_1(1 - x_1) + (fz + \alpha) \frac{q - x_1}{q + x_1} + \varepsilon(x_2 - x_1) \quad (7)$$

$$\frac{dz}{dt} = x_1 - z \quad (8)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 1 - (b + 1)x_2 + ax_2^2y_1 + \varepsilon(x_1 - x_2) \quad (9)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = bx_2 - ax_2^2y_1 \quad (10)$$

El sistema de ecs. (7)-(10) se resolvió mediante el método usual de Runge Kutta de cuarto orden con paso de tiempo adimensional de 0.001 para los siguientes valores de los parámetros:  $\beta = 0.3$ ,  $f = 1.0$ ,  $q = 0.015$ ,  $\alpha = 0.03$ ,  $a = 1.0$ ,  $b = 2.5$ , con condiciones iniciales  $x_1(0) = 0.8$ ,  $z(0) = 0.6$ ,  $x_2(0) = 0.5$ ,  $y_1(0) = 0.2$ , adimensionales. Los valores de dichos parámetros son elegidos de acuerdo a los resultados del análisis de estabilidad no lineal de los modelos por separado, esos valores específicos de los parámetros provocan un comportamiento oscilatorio periódico en la solución numérica tanto del Oregonator como del Brusselator (Sagués y col. (2003)). El parámetro de acoplamiento  $\varepsilon$  fue incrementado gradualmente. La evolución de la sincronización en las ecs. (7)-(10) se estudió a partir de las series de tiempo obtenidas de la solución numérica. De dichas series de tiempo se calculó la dimensión fractal, se empleó el método numérico de la Transformada Rápida de Fourier (FFT) para el cálculo del espectro de potencias, se obtuvo el

máximo exponente de Lyapunov, la predictibilidad, la función de autocorrelación y finalmente el diagrama de recurrencia de la solución numérica de la variable  $z$  para distintos valores del parámetro de acoplamiento.

### 3 Resultados y discusión

Para observar la dinámica de sincronización en la solución numérica de las ecs. (7)-(10), se varió el parámetro de acoplamiento  $\varepsilon$ , en un rango de 0 a 30.

Cuando  $\varepsilon = 0$ , no existe ningún acoplamiento entre las variables de las ecs. (7)-(10) y sus soluciones son independientes y periódicas, lo cual puede corroborarse al observar el espacio fase o variedad de sincronización cuyo gráfico se muestra en la Fig. 1.

De igual forma en la Fig. 1 se puede apreciar que cuando el parámetro de acoplamiento se aumenta gradualmente de 0.5 a 2, comienza la sincronización de fase entre las variables del modelo acoplado, sin embargo la solución de dichas variables muestra órbitas periódicas. Si  $\varepsilon = 2.5$  el sistema sigue mostrando sincronización de fase junto con la aparición de un estado de caos intermitente, dicho estado caótico provoca la emergencia de un atractor extraño en el espacio de fases formado por las variables  $x_1$ ,  $x_2$  y  $z$  mismo que se puede observar en la Fig. 2.

Originalmente el modelo del Oregonator Modificado y el Brusselator son modelos 2 dimensionales cuyas soluciones numéricas para determinados valores de sus parámetros muestran órbitas periódicas, al acoplar el sistema mediante el término unidireccional simétrico se obtiene un sistema 4 dimensional lo que aumenta la posibilidad de obtener un estado caótico en la solución numérica.

Es bien conocido que el espectro de frecuencias de una variable caótica muestra una banda en un amplio rango de frecuencias en lugar de picos individuales como sucede en sistemas o variables periódicas (Crutchfield y col., 1980; Nauenber y col., 1981; Bergé y col., 1984). Para corroborar la emergencia de un estado caótico para  $\varepsilon = 2.5$  se obtuvo el espectro de potencias de las variables del sistema acoplado para distintos valores de  $\varepsilon$  entre 0 y 5, obteniéndose picos bien definidos para valores de  $\varepsilon = 0, 1$  y  $5$ , mientras que para  $\varepsilon = 2.5$  se observa una banda de frecuencias (figs. 5-8).

Cuando una señal es caótica, la información sobre el origen del sistema se pierde y solo puede

existir una correlación con su pasado inmediato, dicha pérdida de información puede relacionarse con la función de autocorrelación (Tamasevicius y col., 1996; Babloyantz y col., 1986). En la Fig. 9 se aprecia la función de autocorrelación de las variables del sistema acoplado para  $\varepsilon = 2.5$  las funciones de autocorrelación muestran un pico máximo al inicio que cae con el tiempo, es decir, existe pérdida de información conforme  $t \rightarrow \infty$ .

El espectro de los exponentes de Lyapunov ha sido empleado para el análisis de sistemas dinámicos caóticos cuando el sistema dinámico que origina las series de tiempo caóticas es conocido (Brown y col., 1991; Wolf, 1986; Moon, 1992), sin embargo, cuando el sistema de ecuaciones diferenciales que origina la serie de tiempo no es conocido, es posible evaluar el máximo exponente de Lyapunov de la serie temporal para medir el nivel de caoticidad (Brown y col., 1991; Moon, 1992). En el caso del Oregonator Modificado y el Brusselator acoplados, se calculó el máximo exponente de Lyapunov para las series de tiempo obtenidas de la solución numérica de las ecs. (7)-(10) para distintos valores de  $\varepsilon$ , observándose que el exponente de Lyapunov alcanza su máximo valor cuando  $\varepsilon = 2.5$  (Fig. 10) y a su vez el mínimo de predictibilidad para el mismo valor de  $\varepsilon$  (Fig. 11), en otras palabras, el sistema es menos predecible cuando se encuentra acoplado con un valor de  $\varepsilon = 2.5$ , dando lugar a un estado de caos intermitente.

Como se puede observar en la Fig. 12, al evaluar la dimensión fractal de las series de tiempo obtenidas de la solución numérica de las ecs. (7)-(10) para distintos valores de  $\varepsilon$  se aprecia que cuando  $\varepsilon$  se encuentra en un rango entre 2 y 3, la dimensión fractal tiende a oscilar ligeramente dando lugar posiblemente a un estado multifractal.

La técnica del análisis de recurrencia ha sido utilizada para evaluar estados caóticos en series de tiempo de electroencefalogramas (Webber y col., 1994; Babloyantz, 1991) y en osciladores caóticos como el de Lorenz y Rössler, obteniéndose patrones característicos de sistemas caóticos (Celik y col., 2013), por ello, se obtuvo el diagrama de recurrencia de la serie de tiempo obtenida de la solución numérica de la variable  $z$  para distintos valores del parámetro  $\varepsilon$ . Al realizar dicho análisis para distintos valores de  $\varepsilon$  se obtuvo un patrón similar al de un sistema caótico cuando  $\varepsilon = 2.5$ , además al calcular la dimensión fractal del patrón obtenido del diagrama de recurrencia se encuentra que posee su valor máximo precisamente en  $\varepsilon = 2.5$  (Fig. 13).

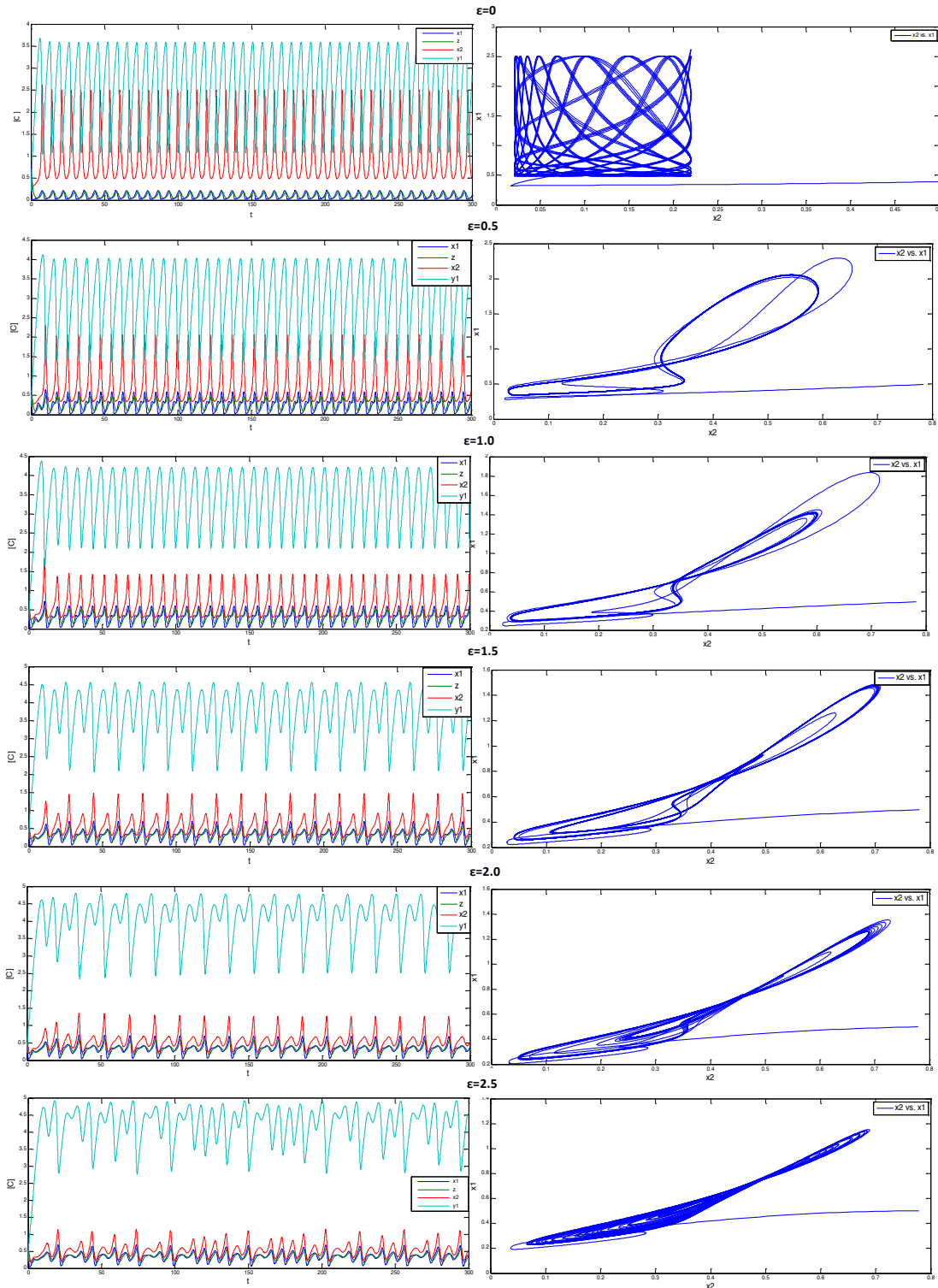


Fig. 1. Solución numérica de las ecs. (7)-(10) y espacio fase de  $x_2$  vs  $x_1$  para los valores del parámetro de acoplamiento  $\epsilon = 0, 1.0, 1.5, 2.0$  y  $2.5$ .

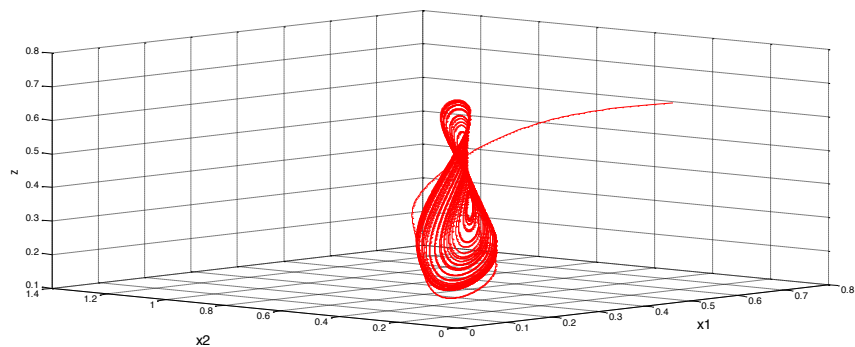


Fig. 2. Atractor extraño del sistema para  $\varepsilon = 2.5$ .

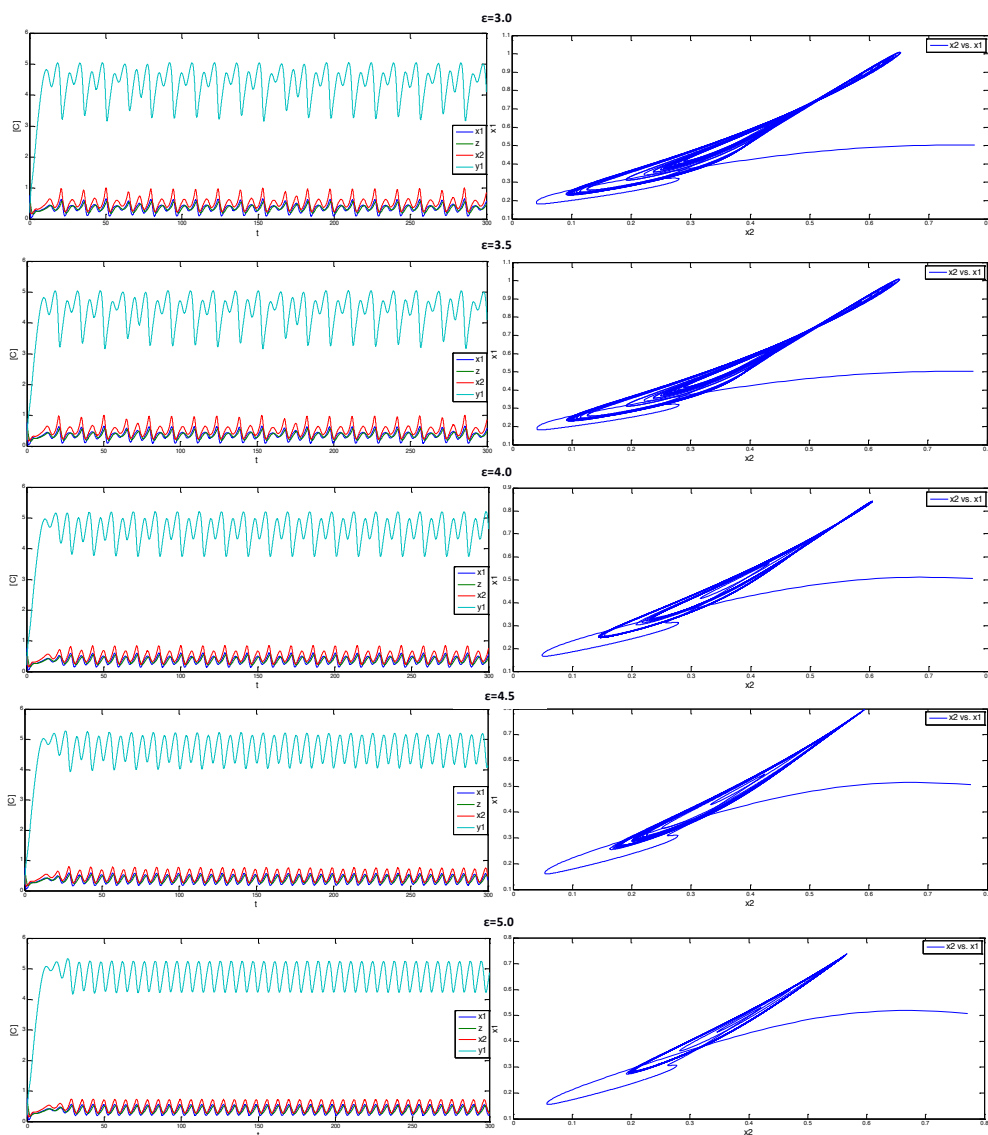


Fig. 3. Solución numérica de las ecs. (7)-(10) y espacio fase de  $x_2$  vs  $x_1$  para los valores del parámetro de acoplamiento  $\varepsilon = 3.0, 3.5, 4.0, 4.5$  y  $5.0$ .

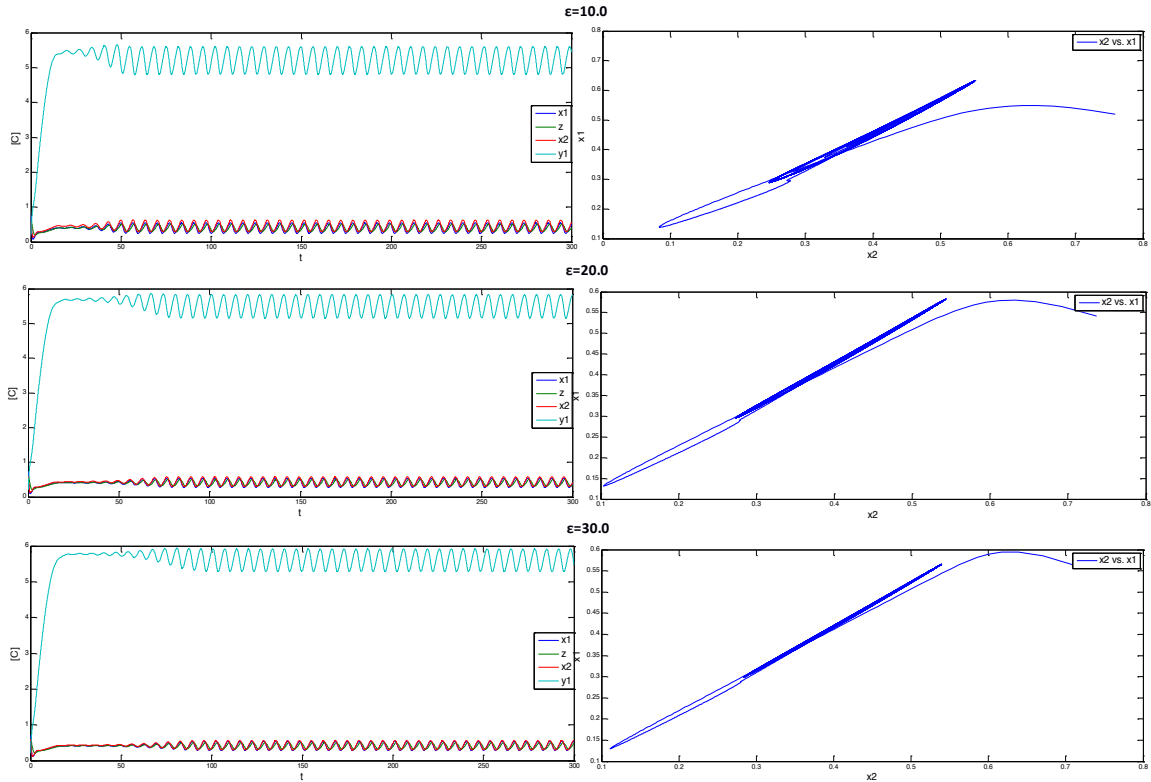


Fig. 4. Solución numérica de las ecs. (7)-(10) y espacio fase de  $x_2$  vs  $x_1$  para los valores del parámetro de acoplamiento  $\varepsilon = 10.0, 20.0$  y  $30.0$ .

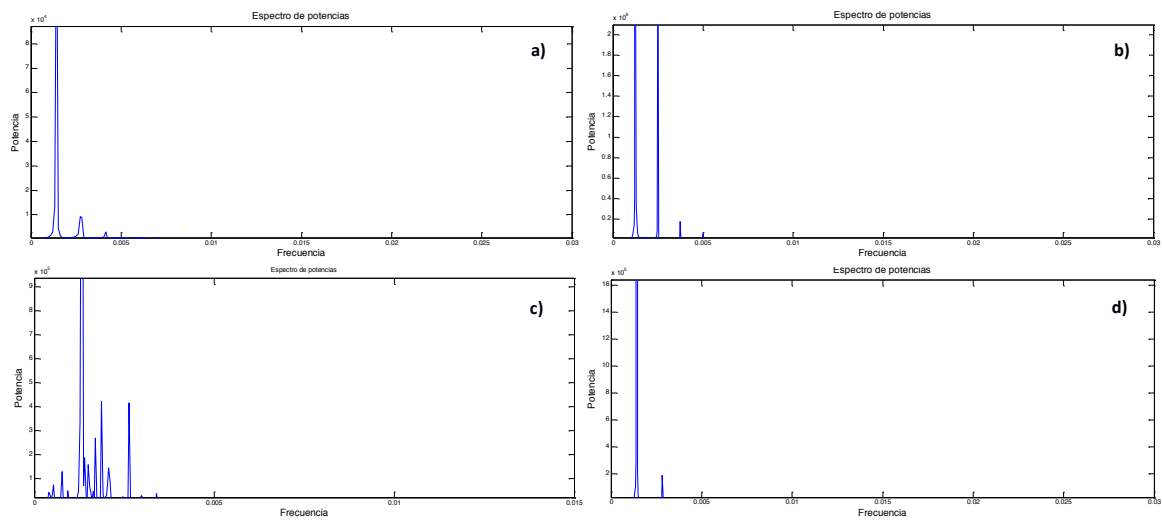


Fig. 5. Espectro de potencias de la variable  $x_1$  para a)  $\varepsilon = 0$ , b)  $\varepsilon = 1.0$ , c)  $\varepsilon = 2.5$  y d)  $\varepsilon = 5.0$ .

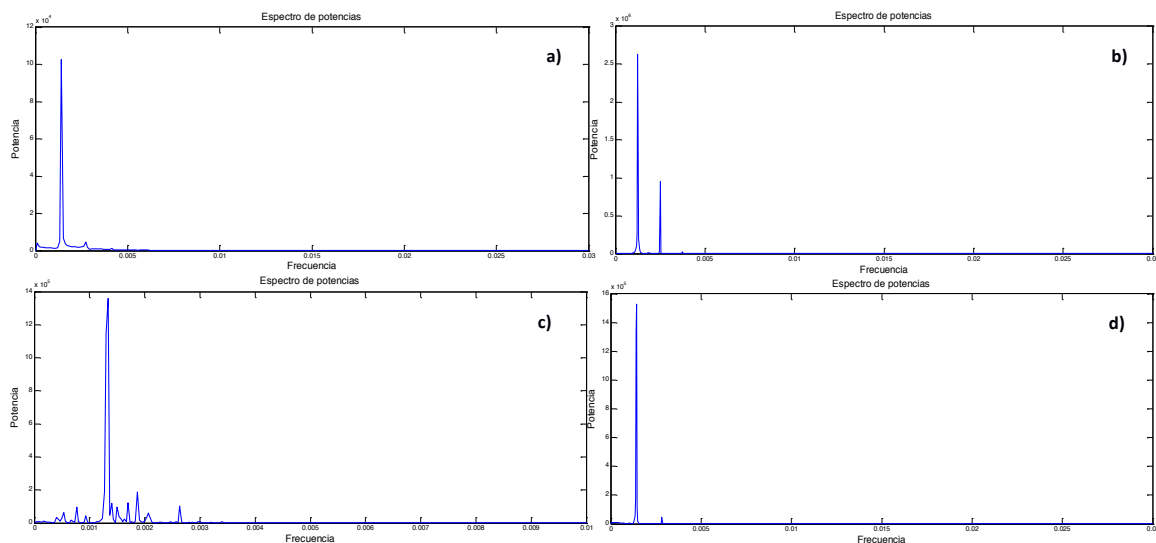


Fig. 6. Espectro de potencias de la variable  $z$  para a)  $\varepsilon = 0$ , b)  $\varepsilon = 1.0$ , c)  $\varepsilon = 2.5$  y d)  $\varepsilon = 5.0$ .

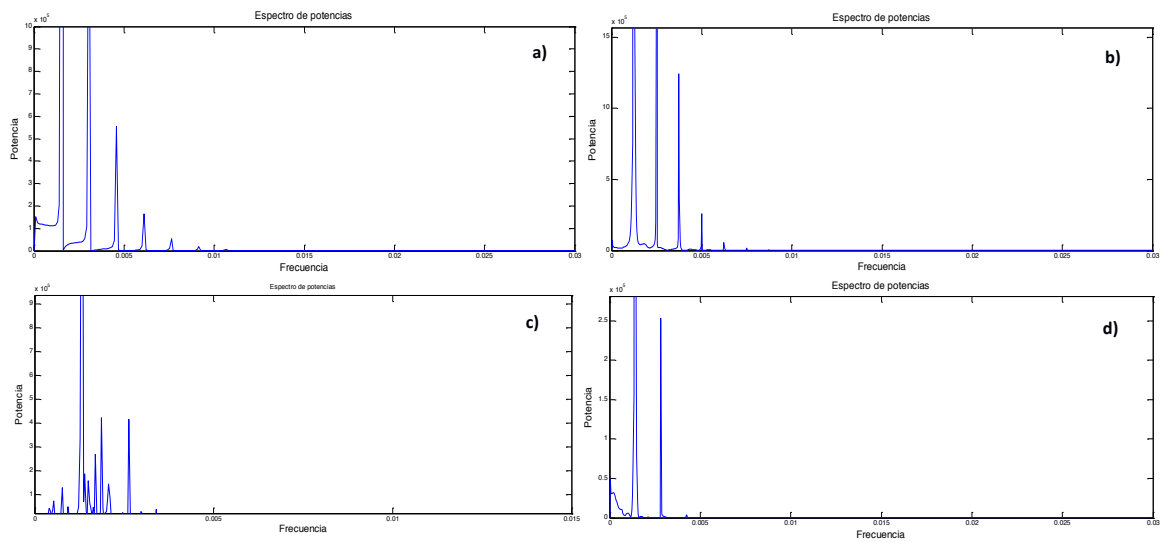


Fig. 7. Espectro de potencias de la variable  $x_2$  para a)  $\varepsilon = 0$ , b)  $\varepsilon = 1.0$ , c)  $\varepsilon = 2.5$  y d)  $\varepsilon = 5.0$ .



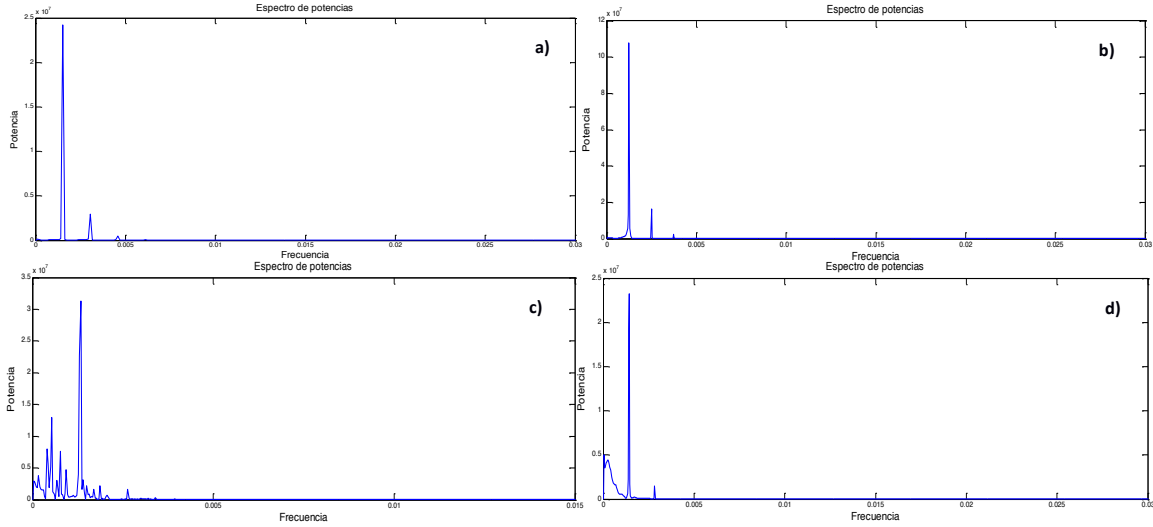


Fig. 8. Espectro de potencias de la variable  $y_1$  para a)  $\varepsilon = 0$ , b)  $\varepsilon = 1.0$ , c)  $\varepsilon = 2.5$  y d)  $\varepsilon = 5.0$

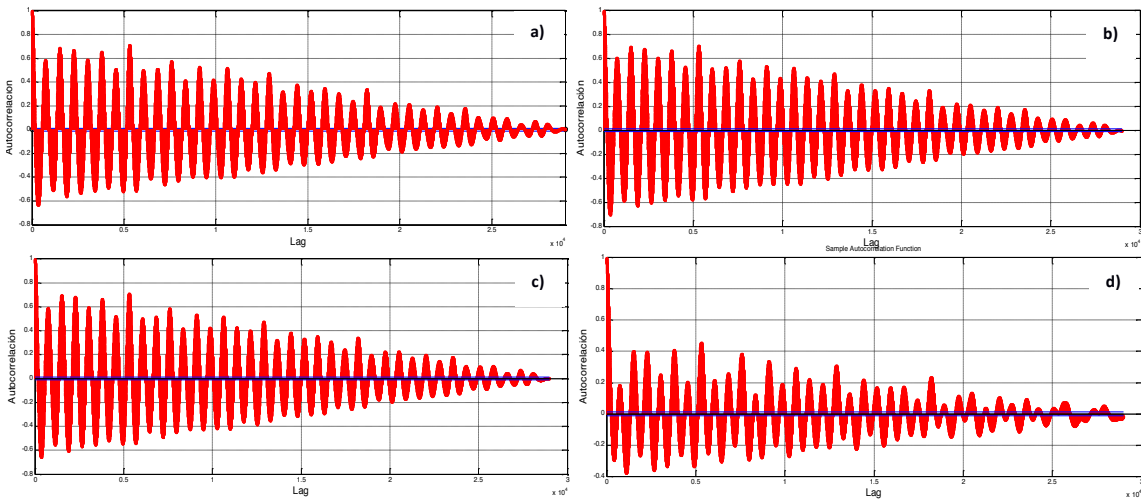


Fig. 9. Autocorrelación de a)  $x_1$ , b)  $z$ , c)  $x_2$  y d)  $y_1$  para  $\varepsilon = 2.5$ .

Mientras el parámetro de acoplamiento sigue aumentando de 3 a 30 (figs. 3-4) se observa la emergencia de la sincronización completa entre las variables  $x_1$ ,  $z$  y  $x_2$  y la sincronización de fase entre la variable  $y_1$  y las variables  $x_1$ ,  $z$  y  $x_2$ . Cuando  $\varepsilon = 30$  se aprecia la sincronización monótona que puede

corroborarse en la variedad de sincronización (Fig. 4).

En la Fig. 14 aparece el error promedio entre las variables  $x_2$  y  $x_1$  para distintos valores del parámetro de acoplamiento  $\varepsilon$ , que muestra la disminución de dicho error conforme el valor del parámetro aumenta.

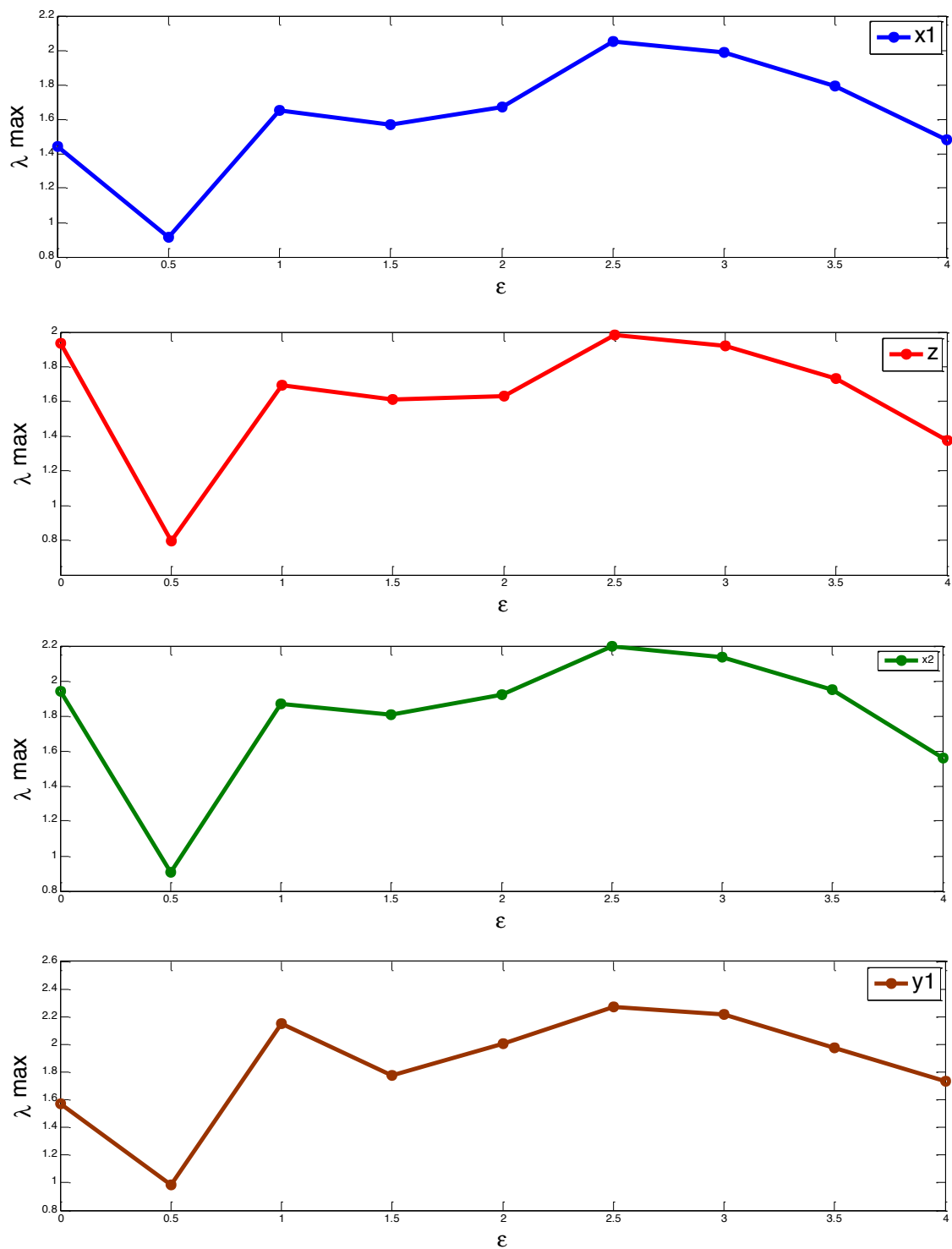


Fig. 10. Máximo exponente de Lyapunov para las series temporales de la solución numérica de las ecs. (7)-(10) con  $\varepsilon = 0$  a  $\varepsilon = 4$ .

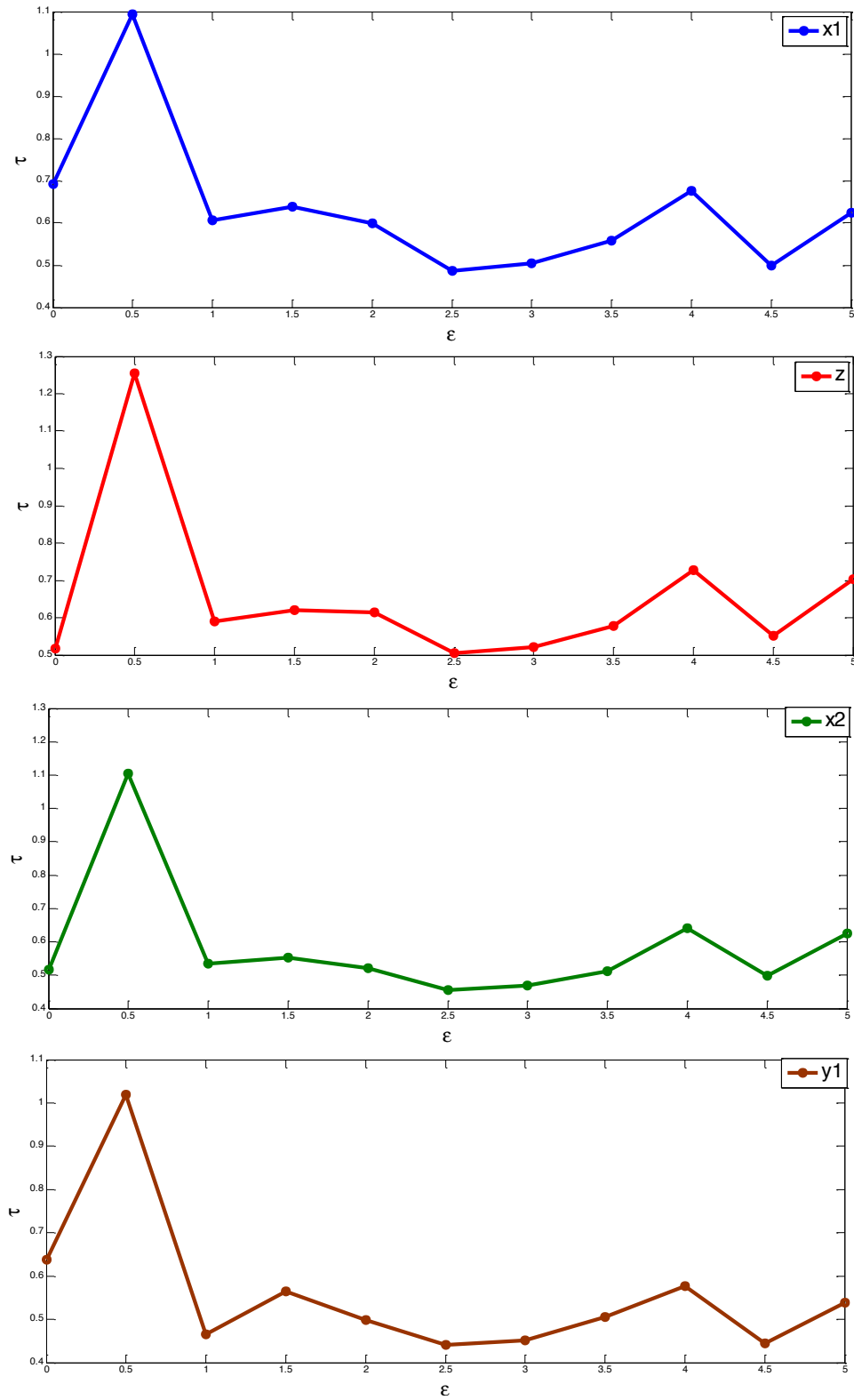


Fig. 11. Predictibilidad para distintos valores del parámetro  $\epsilon$ .

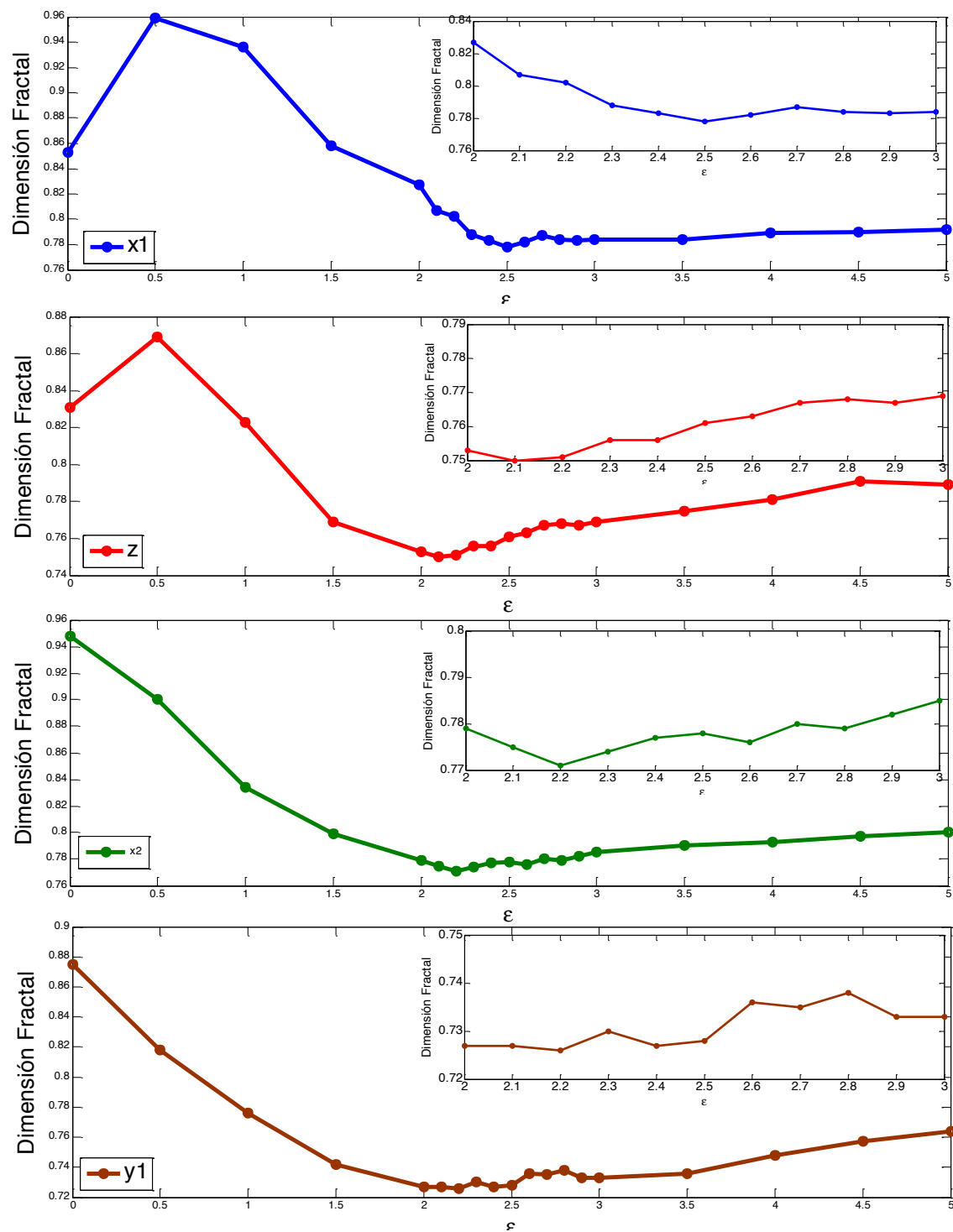


Fig. 12. Dimensión fractal para las series temporales de la solución numérica de las ecs. (7)-(10) con  $\epsilon = 0$  a  $\epsilon = 4$ .

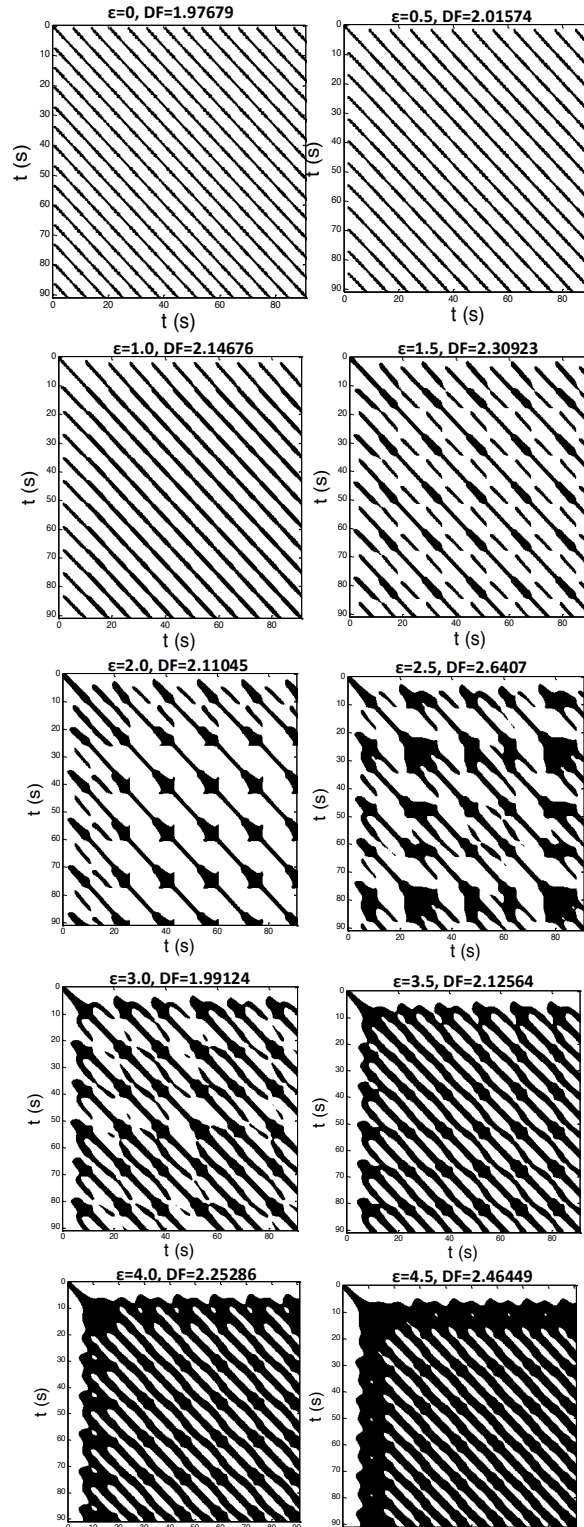


Fig. 13. Diagramas de recurrencia y dimensión fractal de la variable  $z$  para distintos valores del parámetro  $\epsilon$ .

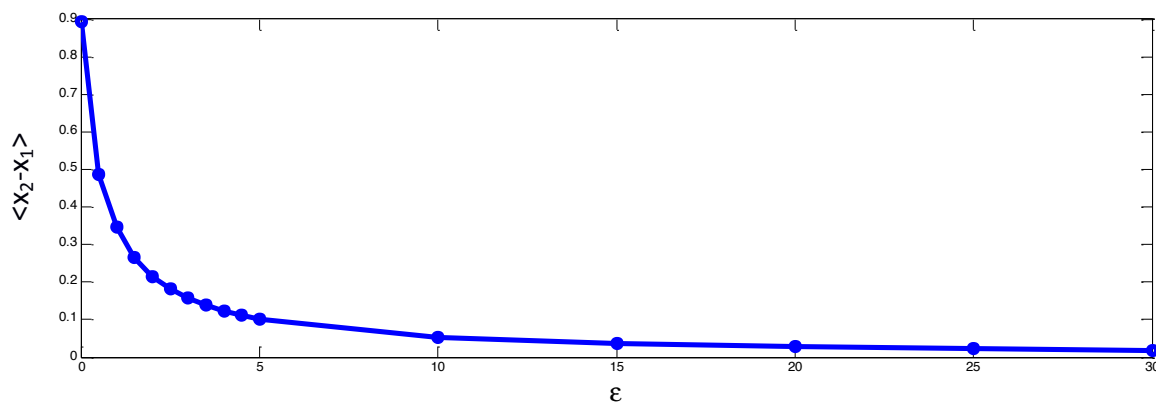


Fig. 14. Diferencia promedio entre las variables  $x_2$  y  $x_1$  para distintos valores de parámetro  $\epsilon$ .

## Conclusiones

El incremento del parámetro de acoplamiento  $\epsilon$  favorece la emergencia de la sincronización de fase entre las variables del sistema, dando lugar a soluciones periódicas, y un estado de caos intermitente para un valor particular del parámetro de acoplamiento. La modelación matemática de sistemas químicos de distinta naturaleza, así como su acoplamiento ya sea unidireccional simétrico o bidireccional, puede ser una metodología para estudiar la compleja dinámica que subyace en los procesos de sincronización de los ritmos fisiológicos, dicha metodología podrá ayudar a entender la relación que existe entre los osciladores circadianos y patologías asociadas con el metabolismo, tal como la diabetes mellitus tipo II, puesto que se ha demostrado que el ciclo luz-obscuridad y la alimentación son mecanismos sincronizadores en mamíferos (Mendoza, 2009; Escobar y col., 2001).

## Referencias

- Arroyo, D. A., Ruiz, F. R. y Pisarchik, A. N. (2009). Sincronización de lasers semiconductores acoplados en anillo. *Congreso Anual de la Asociación de México de Control Automático, Zacatecas, México*.
- Arzola, J. A., Morales, M. A., Hernández, A. A. and Cervantes, A. M. (2013). Dinámica no-lineal en procesos bioquímicos: oscilaciones químicas, ciclo de Krebs y sistema regulador de pH. *Encuentro Nacional y III Congreso Internacional de la AMIDIQ*.
- Babloyantz, A. (1991). Evidence for slow brain waves: a dynamical approach. *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology* 78, 402-405.
- Babloyantz, A. and Destexhe, A. (1986). Low-dimensional chaos in an instance of epilepsy. *Pro. Natl. Acad. Sci.* 83, 3513-3517.
- Bergé, P., Pomeau, Y. and Vidal, C. (1984). *Order within Chaos*. John Wiley & Sons, E.E.U.U.
- Boccaletti, S., Valladares, D. L., Kurths, J., Maza, D. and Mancini, H. (2000). Synchronization of chaotic structurally nonequivalent systems. *Physical Review* 61, 3712-3715.
- Brown, R. and Bryant, P. (1991). Computing the Lyapunov spectrum of a dynamical systems from an observed time series. *Physical Review A* 43, 2787-2806.
- Castellanos, M A., Rodríguez, K., Salgado, R. y Escobar, C. (2007). Anatomía de un reloj (anatomía del sistema circadiano). *Arch. Mex. Anat. Nueva Epoca* 2, 15-20.
- Celik, E. T. and Serbanescu, A. (2013). Applications of Transient Signals Detection Using Recurrence Plot Analysis. *Proceedings: Chaos and Complex Systems, Proceedigns of the 4th International Interdisciplinary Chaos Symposium*.
- Crutchfield, J., Farmer, D., Packard, N. and Shaw, R. (1980). Power spectral analysis of dynamical systems. *Physics Letters* 76A, 1-4.

- Escobar, C., Martínez, M. T., Ángeles, M. y Mendoza J. (2001). El alimento como sincronizador de los ritmos biológicos: su relevancia para la identificación de un oscilador circadiano. *Rev. Fac. Med. UNAM* 44, 58-62.
- Field, R. J. and Noyes, R. M. (1987). Oregonator model of the Belousov-Zhabotinsky reaction. *The Journal of Chemical Physics* 60, 1974.
- Glass, L. (2001). Synchronization and rhythmic processes in physiology. *Nature* 410, 227-284.
- Goldbeter, A. (1995). A model for circadian oscillations in the drosophila period protein (PER). *Proceedings: Biological Science* 261, 318-324.
- Heagy, J. F., Carroll, T. L. and Pecora, L. M. (1995). Desynchronization by periodic orbits. *Physical Review E* 52, 1253-1256.
- Kocarev, L. and Parlitz, U. (1996). Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems. *Physical Review Letters* 76, 1816-1819.
- Mendoza, J. (2009). Neurobiología del sistema circadiano: su encuentro con el metabolismo. *Suma Psicológica* 16, 85-95.
- Moon, F. C. (1992). *Chaotic and Fractal Dynamics, An introduction for Applied Scientists and Engineers*. John Wiley & Sons, E.E.U.U.
- Nauenber, M. and Rudnick, J. (1981). Universality and the power spectrum at the onset of chaos. *Physics Review B*, 493.
- Nicolis, G. and Prigogine, I. (1977). *Self-Organization in Nonequilibrium Systems*. John Wiley & Sons, E.E.U.U.
- Oporto, S. A. y Ramírez, G. M. (2014). Sincronización y estabilidad en un sistema compuesto por dos osciladores químicos idénticos. *Revista Boliviana de Física* 25, 7-13.
- Pecora, L. M. and Carrol, T. L. (1990). Synchronization in Chaotic Systemas. *Physical Review Letters* 64, 821-825.
- Pimentel A. (2008). *Sincronización y Fenómenos Colectivos, Modelos de Redes Complejas y Votantes*. CopIt Arxives, México.
- Roseblum, M.G., Pykovsky, A. S. and Kurths, J. (1997). From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Physical Review Letters* 78, 4193-4196.
- Rosenblum, M. G., Pykovsky, A. S. and Kurths, J. (1996). Phase synchronization of chaotic oscillators. *Physical Review Letters* 76, 1804-1807.
- Sagués, F. and Epstein, I. R. (2003). Nonlinear chemical dynamics. *Dalton Trans.*, 1201-1217.
- Seung, K. H., Kurrer, C., Kuramoto, Y. (1995). Dephasing and bursting in coupled neural oscillators. *Physical Review Letters* 75, 3190-3193.
- Taherion, S. and Lai, Y. C. (1999). Observability of lag synchronization of coupled chaotic oscillators. *Physical Review E* 59, 6247-6250.
- Tamasevicius, A., Namajunas, A. and Cenys, A. (1996). Simple 4D oscillator. *Electronics Letters* 32, 957-958.
- Vidal, G. (2010). *Sincronización y control de sistemas dinámicos en régimen de caos espacio-temporal*. Tesis de Doctorado en Ciencias, Universidad de Navarra, España.
- Webber, C. L., Zbilut, J. P. (1994). Dynamical assessment of physiological systems and states using recurrence plot strategies. *Journal of Applied Physiology* 76, 965-973.
- Wolf, A. (1986). Quantifying chaos with Lyapunov exponents. *Chaos*, 273-290.
- Zhabotinsky A. M. (1991). A history of chemical oscillations and waves. *Chaos* 4, 379-386.